

Cap 10. Movimento rotacional de corpos rígidos

Um corpo rígido é uma coleção de N partículas cuja forma não se altera - a distância entre 2 quaisquer de suas partículas é fixa. Um corpo rígido perfeito é uma idealização extremamente útil, e uma excelente aproximação para muitos sistemas reais.

Num certo sentido, um corpo rígido de N partículas é muito + simples que um sistema arbitrário de N partículas: neste último, são necessárias $3N$ coordenadas para especificar uma configuração, enquanto o corpo rígido só precisa de 6: 3 para a posição do CM e 3 para especificar sua orientação. Mais do que isto, vamos ver que o movimento de um corpo rígido pode ser separado em 2 problemas + simples e separados: o movimento de translação do CM e a rotação do corpo em torno do CM.

10.1 Propriedades do CM

Seja um sistema de N partículas $\alpha = 1, \dots, N$ com massas m_α nas posições \vec{r}_α medidas em relação a uma origem O escolhida.

Por definição,

$$\vec{R}_{CM} = \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha, \text{ ou } \vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

para distribuições contínuas de massa.

- Momento total e o CM

Por definições,

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{R}} = M \dot{\vec{R}}$$

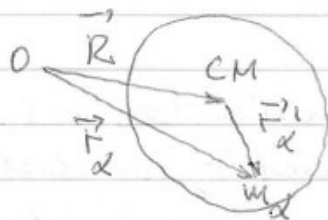
é o momento de uma partícula (fictícia) de massa M e velocidade igual a do CM. Derivando esta equação temos

$\dot{\vec{P}} = M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{\text{ext}}$, e esta partícula se move sob a ação da resultante das forças (externas) que agem sobre o sistema. Este é o resultado que justifica tratarmos sistemas estendidos com o modelo de partícula.

- Momento angular total

O papel do movimento do CM no momento angular total do sistema é um pouco + complicado, mas igualmente crucial.

O que se segue é também verdade para sistemas arbitrários, mas vamos focalizar um corpo rígido composto por N "pedaços" de massas m_{α} : em relação à origem O ,



$$\vec{r}_{\alpha} = \vec{R} + \vec{r}'_{\alpha}$$

$$\vec{l}_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}$$

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} \vec{l}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \quad \text{Logo,}$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{\alpha} (\vec{R} + \vec{r}'_{\alpha}) \times m_{\alpha} (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}'_{\alpha}) = \\ &= \sum_{\alpha} \vec{R} \times m_{\alpha} \dot{\vec{R}} + \sum_{\alpha} \vec{R} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}'_{\alpha} + \sum_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\vec{R}} \\ &\quad + \sum_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}'_{\alpha} \end{aligned}$$

$$\vec{L} = \vec{R} \times M \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} + \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \right) \times \vec{R} + \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}$$

Mas $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} = 0$ (posições do CM em relação ao CM), e

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} = 0$$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}$$

→ momento angular associado ao movimento do CM

→ associado ao movimento em relação ao CM

Exemplo: considere movimento de um planeta ao redor do Sol, tomado como fixo. Seu momento angular total é a soma (vetorial) do momento angular associado ao movimento orbital do CM do planeta com o momento angular associado a seu movimento de rotação em torno do CM.

$$\vec{L} = \vec{L}_{\text{orbital}} + \vec{L}_{\text{rotação (spin)}}$$

Esta separação em 2 partes é especialmente útil porque é muitas vezes verdade (pelo menos com boa aproximação) que elas se conservam separadamente:

$$\vec{L}_{\text{orbital}} = \vec{R} \times \vec{P}$$

$$\dot{\vec{L}}_{\text{orbital}} = \underbrace{\dot{\vec{R}} \times \vec{P}}_{=0} + \vec{R} \times \dot{\vec{P}} = \vec{R} \times \vec{F}_{\text{ext}}$$

Em particular, se a força do Sol sobre o planeta fosse perfeita

tamente central (\vec{F}_{ext} e \vec{R} colineares), \vec{L}_{orbital} seria constante.

Na prática, esta força não é exatamente central (planetas não são perfeitamente esféricos e o campo gravitacional do Sol não é perfeitamente uniforme), mas esta é uma aproximação excelente.

Vamos determinar $\dot{\vec{L}}_{\text{spin}}$:

$$\vec{L}_{\text{spin}} = \vec{L} - \vec{L}_{\text{orbital}}, \quad \text{e} \quad \dot{\vec{L}} = \vec{\Sigma}_{\text{externo}}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{F}}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^{\perp} + \vec{R}) \times \dot{\vec{F}}_{\alpha}^{\text{ext}} = \\ &= \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^{\perp} \times \dot{\vec{F}}_{\alpha}^{\text{ext}} + \vec{R} \times \dot{\vec{F}}^{\text{ext}}, \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{L}}_{\text{spin}} = \dot{\vec{L}} - \dot{\vec{L}}_{\text{orbital}} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^{\perp} \times \dot{\vec{F}}_{\alpha}^{\text{ext}} = \vec{\Sigma}_{\text{CM}}^{\text{ext}} \quad (\text{em relação ao CM}),$$

resultado que foi mencionado sem demonstração no capítulo 3. O que o torna surpreendente é que o referencial do CM não é, em geral, inercial - não haveria motivo a priori para acharmos que a eq. de movimento do momento angular - obtida a partir da 2ª lei - fosse verdadeira neste referencial.

Como o torque produzido pelo Sol em relação ao CM de um planeta é muito pequeno, \vec{L}_{spin} é aproximadamente constante. No entanto, considerar \vec{L}_{spin} constante, apesar de ser uma boa aproximação, não é exato. Para o nosso planeta,

a protuberância equatorial é responsável pela existência de um pequeno torque devido ao Sol (e à Lua) e \vec{L}_{spin} não é exatamente constante. A variação lenta de \vec{L}_{spin} é responsável pelo efeito conhecido como precessão dos equinócios, rotação do eixo terrestre em relação as estrelas a uma taxa de $50''$ por ano.

Existe uma divisa correspondente (mas não exatamente análoga) do momento angular quântico em partes orbital e de spin. Por exemplo, o momento angular do elétron orbitando o próton num átomo de hidrogênio é composto de 2 termos e, por razões similares às nossas, cada um deles é (aproximadamente) conservado independentemente. Mas isto é só uma aproximação: existe um pequeno torque de origem magnética sobre o elétron, e a conservação só se aplica exatamente ao momento angular total (espere por Mecânica Quântica II!)

Energia cinética

$$T = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_{\alpha}')^2$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}'^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}'}_{=0}$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}'^2$$

momento do CM

movimento relativo ao CM

Para um corpo rígido, o único movimento possível em relação ao CM é uma rotação; portanto,

$$T = T(\text{CM}) + T(\text{rotação em torno do CM})$$

A demonstração que acabamos de fazer pode ser adaptada para o caso em que \vec{R} é a posição de um ponto do corpo (instantaneamente) em repouso. Neste caso, resulta (já que $\dot{\vec{R}} = 0$)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2, \quad \text{e a energia cinética total}$$

do corpo rígido é apenas a energia rotacional relativa a este centro instantâneo de rotação (ponto de contato com a superfície de corpo que rola sem deslizar, por exemplo)

- Energia potencial de corpo rígido

Se as forças (externas e internas) forem conservativas, vimos no capítulo 4 que

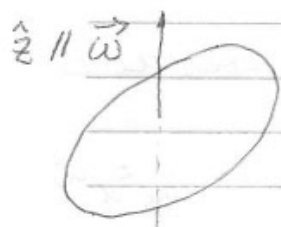
$$U = U_{\text{ext}} + U_{\text{int}}, \quad \text{e}$$

$$U_{\text{int}} = \sum_{\alpha < \beta} U_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \quad (\text{supondo forças internas centradas})$$

Mas num corpo rígido $r_{\alpha\beta}$ são tão fixos. Logo, U_{int} é constante e pode ser ignorada na discussão do movimento de um corpo rígido só precisamos considerar as forças externas e a energia potencial a elas associada.

- 10.06.09 -

10.2. Rotações em torno de eixo fixo.



$$\vec{L} = \sum_{\alpha} \vec{l}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$

\vec{v}_{α} a velocidade com que os pedaços trafegam em círculos centrados no eixo de rotação.

$$\vec{v}_{\alpha} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}, \text{ e } \vec{\omega} = (0, 0, \omega)$$

$$\vec{r}_{\alpha} = (x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha})$$

⇓

$$\vec{v}_{\alpha} = (-\omega y_{\alpha}, \omega x_{\alpha}, 0) \text{ e}$$

$$\vec{l}_{\alpha} = m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha} = m_{\alpha} \omega (-z_{\alpha} x_{\alpha}, -z_{\alpha} y_{\alpha}, x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2)$$

Vamos calcular separadamente as componentes do momento angular total \vec{L} .

$$L_z = \sum_{\alpha} l_z = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \omega ;$$

mas

$x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 = \rho_{\alpha}^2$, ρ_{α} sendo a distância do ponto (x, y, z) ao eixo z . Portanto,

$$L_z = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \rho_{\alpha}^2 \omega = I_z \omega, \text{ com}$$

$$I_z = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \rho_{\alpha}^2 : \text{ este é o}$$

(já familiar, espelho!) momento de inércia do corpo rígido em relação ao eixo z , e obtivemos que

$$\text{mom. angular} = \text{mom. inércia} \times \text{vel. angular}$$

Vamos agora calcular a energia cinética do corpo girante.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \rho_{\alpha}^2 \omega^2$$

tilibre

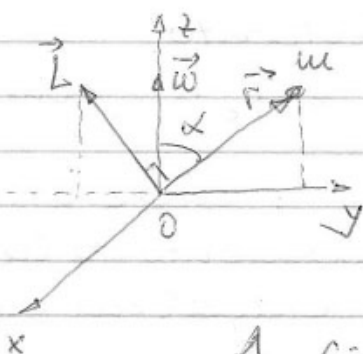
$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \text{ também familiar.}$$

Calculando as outras componentes de \vec{L} obtemos

$$L_x = -\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} \omega \quad \text{e} \quad L_y = -\sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} \omega$$

e, como estes termos não são, em geral, nulos, chegamos à seguinte conclusão surpreendente: a velocidade angular $\vec{\omega}$ tem a direção \hat{z} , mas, como L_x e $L_y \neq 0$, a projeção de \vec{L} no plano xy não é nula e \vec{L} não aponta, em geral, na direção de $\vec{\omega}$ (\hat{z}). Isto é, a relação $\vec{L} = I \vec{\omega}$ que você aprendeu na física básica não é, em geral, verdadeira!!

Como um exemplo desta conclusão talvez surpreendente, considere o sistema abaixo: (haste de massa desprezível, $\vec{\omega} \parallel \hat{x}$)



como
 $\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}$, faz
 ângulo $(90^\circ - \alpha)$ com
 o eixo z .
 $\Rightarrow \vec{L}$ não é \parallel a $\vec{\omega}$!

A figura deixa claro que \vec{L} gira com o corpo; portanto, $\dot{\vec{L}} \neq 0$ e é necessário um torque para que o corpo se mantenha neste movimento. Esta conclusão, estranha a primeira vista, é fácil de entender: o torque necessário

tem a direção de \vec{L} , que aponta na direção $+\hat{x}$. No referencial que gira com a massa m , ela sofre a ação de uma força centrífuga $\parallel +\hat{y} \Rightarrow$ tem que ser equilibrada por força $\parallel -\hat{y}$, que provoca o torque que identificamos a pouco.

Quando um corpo gira sem cessar em torno de uma direção fixa, como as rodas de um carro na estrada, nós usualmente não queremos ter que exercer sobre ele um torque. Isto significa que o corpo deve ser desenhado de modo que \vec{L} seja paralelo a $\vec{\omega}$. Em um carro, isto é conseguido pelo balanceamento dinâmico das rodas. Se elas não estiverem balanceadas, isto é percebido ~~por~~ pela aparecimento de uma vibração desagradável. De uma forma geral, a questão se \vec{L} e $\vec{\omega}$ são ou não paralelos é importante no estudo da rotação e nos leva ao importante conceito de eixos principais (de inércia).

Produtos de inércia

Vamos introduzir notações para descrever alguns resultados acima.

$$L_x = I_{xz} \omega \quad \text{e} \quad L_y = I_{yz} \omega, \text{ onde}$$

$$I_{xz} = -\sum m_\alpha x_\alpha z_\alpha \quad \text{e} \quad I_{yz} = -\sum m_\alpha y_\alpha z_\alpha$$

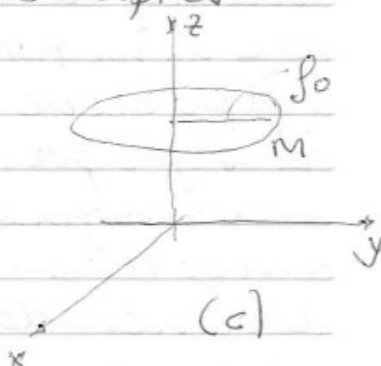
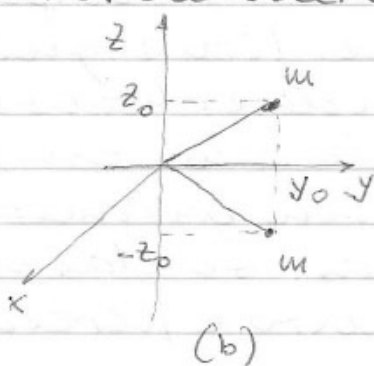
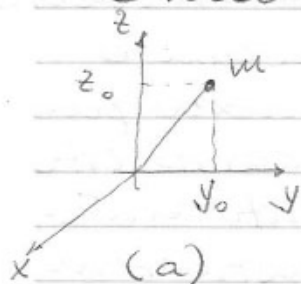
São chamados produtos de inércia do corpo: I_{xz} indica a componente x de L quando $\vec{\omega}$ tem a direção \hat{z} . Por consistência vamos renomear I_z :

$$I_{zz} = \sum m_\alpha r_\alpha^2 = \sum m_\alpha (x_\alpha^2 + y_\alpha^2),$$

e, se um corpo tem velocidade angular $\vec{\omega}$ na direção \hat{z} ,

$$\vec{L} = (I_{xz} \omega, I_{yz} \omega, I_{zz} \omega)$$

Exemplo: cálculo de alguns produtos e momentos de inércia simples.



$$(a) I_{xz} = -m x_0 z_0 = 0 ; I_{yz} = -m y_0 z_0$$

$$I_{zz} = m y_0^2 \Rightarrow L_y \neq 0$$

$$(b) I_{xz} = -m (x_0 z_0 - x_0 z_0) = 0$$

$$I_{yz} = -m (y_0 z_0 - y_0 z_0) = 0$$

$$I_{zz} = 2m (x_0^2 + y_0^2) = 2m y_0^2,$$

e $I_{yz} = 0$ porque o sistema tem simetria de reflexão no plano xy ($z=0$) $\Rightarrow \vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

$$(c) \quad I_{xy} = 0 : \text{simetria de reflex\~{a}o em } x=0$$

$$I_{yz} = 0 : \text{ " " " " } y=0$$

$$I_{zz} = M \rho_0^2$$

Os 2 produtos de in\u00e9rcia s\u00e3o nulos porque o corpo \u00e9 sim\u00e9trico com rela\u00e7\u00e3o ao eixo de rota\u00e7\u00e3o, e isto \u00e9 um resultado geral. Logo, se um corpo tem $\vec{\omega}$ sobre um eixo de simetria, $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$.

10.3 Rota\u00e7\u00e3o em torno de eixo qualquer: o tensor de in\u00e9rcia.

Se um corpo est\u00e1 girando em torno de um eixo fixo, sempre podemos escolh\u00ea-lo como o eixo z . Mas o eixo de rota\u00e7\u00e3o pode mudar com o tempo, e por isso precisamos examinar a forma que toma o momento angular para um eixo de rota\u00e7\u00e3o gen\u00e9rico.

Temos uma segunda raz\u00e3o para isto. Vimos que as dire\u00e7\u00f5es do momento angular e da velocidade angular (eixo de rota\u00e7\u00e3o) n\u00e3o coincidem, em geral, mas que algumas vezes elas o fazem. Isto acontece quando o eixo em quest\u00e3o \u00e9 um eixo principal (de in\u00e9rcia). Veremos que um corpo sempre possui 3 eixos principais mutuamente perpendiculares e que a discuss\u00e3o das rota\u00e7\u00f5es fica + simples quando referida a eles. Temos, ent\u00e3o, que desenvolver formalismos para um eixo gen\u00e9rico de rota\u00e7\u00e3o.

- Momento angular para velocidade angular arbitrária

Seja corpo rígido com $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$.

Calculemos seu momento angular:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Mas

$$\begin{aligned} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \vec{\omega} (\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = \\ &= \begin{pmatrix} (y^2 + z^2) \omega_x - xy \omega_y - xz \omega_z, \\ -yx \omega_x + (z^2 + x^2) \omega_y - yz \omega_z, \\ -zx \omega_x - zy \omega_y + (x^2 + y^2) \omega_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_x = I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z$$

$$L_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z$$

$$L_z = I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z,$$

onde

os 3 momentos de inércia I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} e os 6 produtos de inércia I_{xy} , I_{yz} , I_{zx} são definidos de forma análoga aos da seção anterior:

$$I_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2),$$

$$I_{xy} = - \sum_i m_i x_i y_i, \text{ etc.}$$

Podemos simplificar a notação, fazendo $L_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \omega_j$, ou, ainda melhor,

definindo o tensor de inércia

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

e pensando

nos vetores em em 3D como colunas:

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

e a conexão entre \vec{L} e $\vec{\omega}$ ganha a forma compacta matricial

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{I} \vec{\omega}$$

Este é o primeiro exemplo da grande utilidade que a álgebra matricial tem para a mecânica. Em muitas áreas da física - especialmente na mecânica quântica - a formulação de muitos problemas fica muito + simples com a notação matricial e, por isso, você deve se familiarizar com os elementos básicos da álgebra matricial.

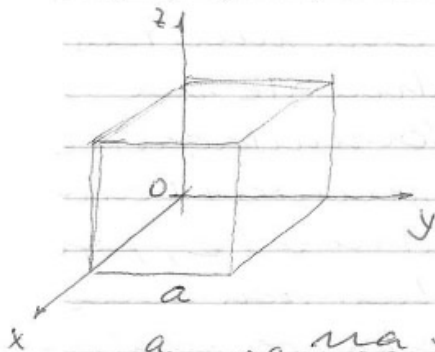
Uma propriedade importante do tensor de inércia é que ele é simétrico, isto é, $I_{ij} = I_{ji}$. Outra maneira de dizer o mesmo é dizer que a matriz que o representa é invariante por reflexões na diagonal principal. Uma terceira é definir a matriz transposta \check{A} como sendo aquela obtida por reflexões de A na diagonal principal ($\check{A}_{ij} = A_{ji}$), e observar que $I = \check{I}$.

Esta propriedade tem papel central na teoria matemática do tensor de inércia.

Exemplo: tensor de inércia de um cubo sólido - girando em torno de

- um vértice
- seu centro.

Nos 2 casos, vamos achar o momento angular quando o eixo de rotaçãõ for paralelo a \hat{x} ($\vec{\omega} = (\omega, 0, 0)$) e quando $\vec{\omega}$ é ao longo da diagonal maior (direçãõ $(1, 1, 1)$).



$$(a) I_{xx} = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz \rho (y^2 + z^2)$$

com $\rho = \frac{M}{a^3}$

que pode ser calculada

na forma

$$\int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz \rho y^2 = \rho \left(\int_0^a dx \right) \left(\int_0^a y^2 dy \right) \left(\int_0^a dz \right)$$

$$= \rho \cdot a \cdot \frac{a^3}{3} \cdot a = \frac{1}{3} Ma^2$$

$$\Rightarrow I_{xx} = \frac{2}{3} Ma^2 = I_{yy} = I_{zz}$$

(simetria)

$$I_{xy} = - \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a dz \rho xy =$$

$$= - \rho \left(\int_0^a x dx \right) \left(\int_0^a y dy \right) \left(\int_0^a dz \right) =$$

$$= - \rho \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a = - \frac{1}{4} Ma^2,$$

que é o mesmo valor de todos os outros produtos de inércia (por simetria). Portanto, para um cubo sólido homogêneo girando em torno de um vértice,

$$\vec{I} = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{(matriz simétrica)}$$

Se $\vec{\omega} = \omega \hat{x}$,

$$\vec{L} = \mathbf{I} \vec{\omega} = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 8\omega \\ -3\omega \\ -3\omega \end{bmatrix}, \text{ ou}$$

$$\vec{L} = Ma^2 \omega \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} \right)$$

e \vec{L} não é \parallel a $\vec{\omega}$.

Se o eixo de rotação   a diagonal principal, $\vec{\omega} \parallel \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) \Rightarrow$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{u} = \frac{\omega}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

$$\vec{L} = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{Ma^2}{12} \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{Ma^2}{6} \vec{\omega}, \text{ e } \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

(b) se o cubo gira em torno de seu centro, devemos mover a origem O para lá \Rightarrow as integrais ter o limites $-a/2$ e $a/2$. Então,

$$I_{xx} = 2 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} y^2 dy \int_{-a/2}^{a/2} dz \cdot \rho =$$

$$= 2 \cdot \rho \cdot a \cdot 2 \cdot \frac{a^3}{3} \cdot a = \frac{1}{6} Ma^2 = I_{yy} = I_{zz}$$

e

$$I_{xy} = -\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} x dx \int_{-a/2}^{a/2} y dy \int_{-a/2}^{a/2} dz = 0$$

Este resultado era previsível: se 2 dos planos $x=0$, $y=0$ e $z=0$ são de simetria de reflexão, todos os produtos de inércia serão nulos; para o cubo com a origem no centro, os 3 são de simetria.



Todos os elementos de \vec{I} fora da diagonal são nulos. Logo,

$$\vec{I} = \frac{1}{6} M a^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} M a^2 \vec{1}$$

matriz unidade

Veremos que, como o tensor de inércia para rotações em torno do centro do cubo é múltiplo da (matriz) unidade, estas serão especialmente fáceis de estudar.

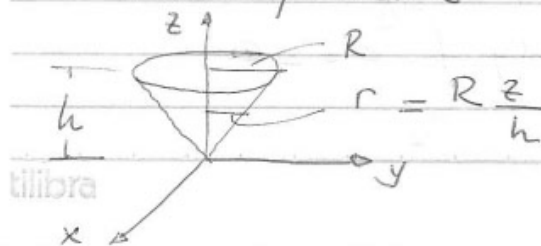
Em particular

$$\vec{L} = \frac{1}{6} M a^2 \vec{1} \vec{\omega} = \frac{1}{6} M a^2 \vec{\omega}$$

e $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$, qualquer que seja $\vec{\omega}$ (resultados devidos ao alto grau de simetria de um cubo em relação a seu centro).

-15/06/09-

Exemplo 2 - tensor de inércia de um cone sólido (massa M , altura h e raio R) girando em torno de sua ponta



$$I_{zz} = \int_V \rho dV (x^2 + y^2)$$

$$\rho = \frac{M}{V}, \quad V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

É fácil calcular esta integral em coordenadas cilíndricas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad dV = \rho d\phi d\rho dz$$

$$I_{zz} = \frac{M}{V} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r \rho d\rho \rho^2, \quad r = \frac{Rz}{h}$$

$$= \frac{M}{V} \cdot 2\pi \int_0^h dz \int_0^{\frac{Rz}{h}} \rho d\rho \rho^2 \Rightarrow I_{zz} = \frac{3}{10} MR^2$$

Pela simetria de rotação em torno do eixo z , $I_{xx} = I_{yy}$ (rotação de $\pi/2$ troca x por y)

$$I_{xx} = \frac{M}{V} \int dV (y^2 + z^2) = \frac{M}{V} \left(\int dV y^2 + \int dV z^2 \right)$$

A primeira é a segunda parcela da integral anterior; por simetria, é $\frac{3}{10} MR^2$. A segunda pode ser calculada em coordenadas cilíndricas:

$$\int dV z^2 = \int_0^h z^2 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r \rho d\rho = \frac{\pi R^2}{5} h^3$$

$$\text{e } I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{20} M (R^2 + 4h^2)$$

Os termos fora da diagonal (produtos de inércia) são todos nulos: pela simetria axial em z , os planos $x=0$ e $y=0$ são de simetria por reflexão.

Portanto,

$$I = \frac{3}{20} M \begin{bmatrix} R^2 + 4h^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + 4h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

onde a última forma só aparece por conveniência da discussão (e neste caso $\lambda_1 = \lambda_2$). Uma matriz com esta propriedade - termos fora da diagonal nulos - é chamada uma matriz diagonal. Quando \vec{I} for diagonal, teremos, para $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$,

$$\vec{L} = \vec{I} \vec{\omega} = (\lambda_1 \omega_x, \lambda_2 \omega_y, \lambda_3 \omega_z)$$
e, se $\vec{\omega} \parallel$ eixo coordenado, \vec{L} também será:

$$\begin{aligned} \text{se } \vec{\omega} \parallel \hat{x} &\Rightarrow \omega_y = \omega_z = 0 \text{ e } \vec{L} = \lambda_1 \vec{\omega} \parallel \hat{x} \\ &\hat{y} \Rightarrow \vec{L} = \lambda_2 \vec{\omega} \parallel \hat{y} \end{aligned}$$

10.4 Eixos principais de inércia.

Quando um corpo gira em torno de um ponto O vimos que, em geral, \vec{L} não é paralelo a $\vec{\omega}$, e que, pelo menos para alguns corpos, podem existir eixos para os quais $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$. Chamamos estes de eixos principais (de inércia). Matematicamente, um eixo principal de um corpo (em relação a uma origem O) é qualquer eixo que passe por O com a propriedade de que, se $\vec{\omega}$ está neste eixo, então $\vec{L} \parallel \vec{\omega} \Leftrightarrow \vec{L} = \lambda \vec{\omega}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, e este λ é o momento de inércia em relação a este eixo.

Vimos que, se o tensor de inércia \vec{I} é diagonal relativo a um conjunto de eixos, então estes são eixos principais.

Nos exemplos, vimos que

- se o corpo tem eixo de simetria que passa por O , este é um eixo principal; quaisquer 2 eixos perpendiculares ao eixo de simetria também são principais
- se o corpo tem 2 planos de simetria por reflexões perpendiculares passando por O , os 3 eixos perpendiculares definidos por estes 2 planos e O são principais.

Apesar das simetrias tornarem mais fácil a identificação dos eixos principais, elas não são necessárias para sua existência. De fato,

- > Qualquer que seja o corpo rígido e para qualquer ponto O , sempre existem (pelo menos) 3 eixos principais ortogonais passando por O .

Este resultado surpreendente é consequência de um teorema matemático que afirma que, se \vec{I} é uma matriz real simétrica, então existe conjunto de eixos ortogonais com a mesma origem em relação aos quais a matriz transformada \vec{I}' é diagonal.

É bom mencionar que os eixos principais de um corpo rígido são fixos em relação ao corpo; portanto, se os escolhermos como eixos coordenados, estaremos

11

necessariamente usando referencial em notações.

Energia cinética de corpo em rotações

Podem-se provar que

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$$

Em particular, se usamos os eixos principais como coordenadas,

$$\vec{L} = (\lambda_1 \omega_1, \lambda_2 \omega_2, \lambda_3 \omega_3), \text{ e}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \lambda_i \omega_i^2, \text{ que é uma generalização}$$

de $T = \frac{1}{2} I_{zz} \omega^2$, válido para rotações em torno de um eixo fixo.

10.5 Equações de autovalores do tensor de inércia: os eixos principais.

Queremos encontrar os eixos principais de inércia de um corpo rígido que gira em torno de um ponto O . Com a ajuda de uma escolha (preliminar) dos eixos coordenados, construímos o tensor de inércia relativo a eles \vec{I} .

Se $\vec{\omega} \parallel$ eixo principal, $\vec{L} = \lambda \vec{\omega}$ para algum real λ ; como $\vec{L} = \vec{I} \vec{\omega}$

$$\Rightarrow \vec{I} \vec{\omega} = \lambda \vec{\omega}$$

que é chamada uma equação de autovalores (da matriz \vec{I})

Uma equação de autovalores expressa a ideia de que uma operação matemática realizada sobre um vetor ($\vec{\omega}$ em

nesso caso) produz um segundo vetor ($\vec{I} \vec{w}$) que tem a mesma direção que o primeiro. O vetor \vec{w} que a satisfaz é chamado um autovetor e o número λ o autovalor que lhe corresponde.

A solução do problema de autovalores compõe-se portanto de 2 partes.

- encontrar os autovetores: as direções dos eixos principais
- para cada um deles, determinar o autovalor, o momento de inércia a ele relativo.

Na prática, o problema é resolvido na ordem oposta - primeiro achamos os autovalores possíveis λ e depois as direções de \vec{w} que lhes correspondem.

A solução:

$$\vec{w} = \vec{I} \vec{w} \Rightarrow \vec{I} \vec{w} = \lambda \vec{I} \vec{w}$$

$$\Rightarrow (\vec{I} - \lambda \vec{I}) \vec{w} = 0$$

que é uma equação matricial da forma $\vec{A} \vec{w} = 0$, onde \vec{A} é matriz 3×3 e \vec{w} matriz coluna 3×1 . Esta equação é, de fato, um conjunto de 3 equações simultâneas para determinar os 3 números w_x , w_y e w_z (sistema de equações lineares): só existe solução não nula ($w_x = w_y = w_z = 0$) se (e somente se) $\det(A) = 0$ (regra de Cramer)

$$\det(\vec{I} - \lambda \vec{I}) = 0$$

que é chamada a equação característica (ou secular) para a matriz \vec{I} - equação cúbica em λ que terá, em geral, 3 soluções λ_1, λ_2 e λ_3 , os 3 momentos de inércia (principais). Para cada um destes valores, a equação $(\vec{I} - \lambda \vec{1}) \vec{w} = 0$ pode então ser resolvida para encontrar \vec{w} , cuja direção nos dá a direção de um dos eixos principais do corpo.

Exemplo: eixos principais de cubo em relação a um vértice

$$\vec{I} = \frac{Ma^2}{12} \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\vec{I} - \lambda \vec{1} = \begin{bmatrix} 8\mu - \lambda & -3\mu & -3\mu \\ -3\mu & 8\mu - \lambda & -3\mu \\ -3\mu & -3\mu & 8\mu - \lambda \end{bmatrix}$$

~~$$\det(\vec{I} - \lambda \vec{1}) = (8\mu - \lambda)^3 - (3\mu)^3 - (3\mu)^3 - 3(8\mu - \lambda)(-3\mu)^2$$

$$= (8\mu - \lambda) [(8\mu - \lambda)^2 - 3(3\mu)^2] - 2 \cdot (3\mu)^3$$~~

$$= (8\mu - \lambda) [(8\mu - \lambda)^2 - (-3\mu)^2]$$

$$- 3\mu [(-3\mu)^2 - (-3\mu)(8\mu - \lambda)]$$

$$- 3\mu [(-3\mu)^2 - (-3\mu)(8\mu - \lambda)]$$

$$= (8\mu - \lambda) [(8\mu - \lambda - 3\mu)(8\mu - \lambda + 3\mu)]$$

$$- 6\mu(3\mu) [3\mu + 8\mu - \lambda]$$

$$= (8\mu - \lambda)(5\mu - \lambda)(11\mu - \lambda) - 6\mu(3\mu)(11\mu - \lambda)$$

$$= (11\mu - \lambda) \left[(8\mu - \lambda)(5\mu - \lambda) - 6\mu(3\mu) \right]$$

$$\lambda^2 - 13\mu\lambda + 22\mu^2 = (\lambda - 11\mu)(\lambda - 2\mu)$$

$$= (2\mu - \lambda)(11\mu - \lambda)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2\mu, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 11\mu$$

Para determinar os autovetores (direções dos eixos principais):

$$(\vec{I} - \lambda \vec{1}) \vec{\omega} = \mu \begin{bmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = 0$$

(i) $\lambda = \lambda_1 = 2\mu$:

$$\mu \begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\omega_x - \omega_y - \omega_z = 0 \\ -\omega_x + 2\omega_y - \omega_z = 0 \\ -\omega_x - \omega_y + 2\omega_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_x = \omega_y = \omega_z$$

$$\Rightarrow \hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$$

e o momento de inércia em relação a este eixo é $\lambda_1 = 2\mu = \frac{1}{6} Ma^2$

(ii) $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 11\mu$

$$\Rightarrow \mu \begin{bmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \omega_x + \omega_y + \omega_z = 0$$

que não determina univocamente a

direções de $\vec{\omega}$. Esta equação é equivalente a $\vec{\omega} \cdot \hat{e}_1 = 0 \Rightarrow \vec{\omega}$ só precisa ser ortogonal a \hat{e}_1 . Quer dizer, quaisquer 2 direções \hat{e}_2 e \hat{e}_3 ortogonais a \hat{e}_1 servem como os 2 outros eixos principais, ambos com momento de inércia $\lambda_2 = \lambda_3 = 11\mu = \frac{11}{12} Ma^2$. Esta liberdade na escolha dos 2 eixos principais restantes está diretamente ligada ao fato destes 2 autovalores serem iguais. Quando todos os autovalores são diferentes, as direções dos eixos principais são univocamente determinadas.

O tensor de inércia relativo aos novos eixos nas direções \hat{e}_1, \hat{e}_2 e \hat{e}_3 é diagonal:

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} Ma^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Por este motivo, o processo de determinação dos eixos principais de um corpo pode ser descrito como a diagonalização do tensor de inércia.

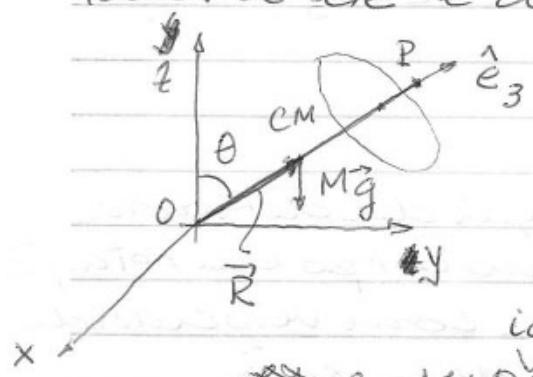
Quando os 3 autovalores forem iguais, qualquer eixo é principal.

- 17/06/09 -

10.6 Precensão de um pião sujeito a um torque fraco.

Como o pião tem simetria axial, seu eixo de simetria é principal e o tensor de inércia relativo ao siste-

ma de coordenadas formado por este eixo e quaisquer 2 outros perpendiculares a ele é diagonal.



$$\vec{I} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Vamos por um momento ignorar a ação gravitacional e supor que o pião gira em torno de seu eixo de simetria com $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ e $\vec{L} = \lambda_3 \vec{\omega} = \lambda_3 \omega \hat{e}_3$.

Como o torque resultante é nulo, \vec{L} é constante \Rightarrow o pião gira indefinidamente em torno do seu eixo com $\vec{\omega}$ constante.

Com a ação gravitacional, o torque resultante é $\vec{\tau} = \vec{R} \times M\vec{g}$, de módulo $R Mg \sin \theta$ e direção ortogonal a \hat{z} e \hat{e}_3 . Vamos supor que este torque seja pequeno.

$\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$
 $\Rightarrow \vec{\omega}$ começa a mudar e ω_1 e ω_2 deixam de ser nulos - mas são pequenos. Logo, $\vec{L} = \lambda_3 \omega \hat{e}_3$ é uma boa aproximação - isto é, a contribuição + importante para \vec{L} continua a ser a rotação em torno do eixo de simetria.

Nesta aproximação, $\vec{\tau} \perp \vec{L}$ (já que $\vec{\tau} \perp \hat{e}_3$) $\Rightarrow \vec{L}$ muda de direção, mas não de módulo.

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau} \Rightarrow \lambda_3 \omega \dot{\hat{e}}_3 = \vec{R} \times M\vec{g}$$

Mas $\vec{R} = R \hat{e}_3$ e $\vec{g} = -g \hat{z}$

$$\Rightarrow \dot{\hat{e}}_3 = \frac{MgR}{\lambda_3 \omega} \hat{z} \times \hat{e}_3 = \vec{\Omega} \times \hat{e}_3,$$

$$\vec{\Omega} = \frac{mgR}{\lambda_3 \omega} \hat{z}$$

Reconhecemos a equação da derivada temporal de vetor fixo no corpo em rotações \Rightarrow o eixo do pião gira com velocidade angular $\vec{\Omega}$ em torno do eixo \hat{z} .

A conclusão é que o torque exercido pelo peso faz o eixo do pião sofrer uma precessão, isto é, mover-se lentamente sobre a superfície lateral de um cone, com ângulo fixo θ e frequência angular $\Omega = \frac{RMg}{\lambda_3 \omega}$ — e a condição de validade da aproximação é $\Omega \ll \omega$.

Esta precessão pode ser entendida em termos elementares — ver Física I.

Fenômeno similar ocorre com a Terra, que gira em torno de um eixo inclinado de 23° com relação à normal ao plano da órbita. A protuberância equatorial faz com que o Sol e a Lua exerçam pequenos torques sobre a Terra, que causam uma lenta precessão (1 volta em 26.000 anos) traçando a superfície lateral de um cone. Esta é a precessão dos equinócios.

10.7 Equações de Euler

Estamos agora prontos para estabe-

leceu uma forma das eq. de movimento para um corpo rígido em rotações.

Nessa discussão vai ser aplicada a 2 situações principalmente:

- (1) corpo que gira em torno de um ponto fixo, como o piã da seção anterior
- (2) corpo sem ponto fixo - examinaremos seu movimento de rotações em torno do CM.

As equações que escrevermos são chamadas eq. de Euler e podem ser encaradas como a versão da 2ª lei para rotações na forma $m\vec{a} = \vec{F}$. Alguns problemas podem ser facilmente resolvidos usando-se estas equações; um número maior fica + simples na formulação lagrangiana.

Vamos manipular 2 sistemas coordenados, um deles inercial, com eixos x, y, z - o referencial do espaço - e o outro definido pelos eixos principais do corpo em foco, \hat{e}_1, \hat{e}_2 e \hat{e}_3 , fixos no corpo - o referencial do corpo.

Se a velocidade angular do corpo é $\vec{\omega}$, e os momentos de inércia são λ_1, λ_2 e λ_3 , então, no referencial do corpo,

$$\vec{L} = (\lambda_1 \omega_1, \lambda_2 \omega_2, \lambda_3 \omega_3)$$

Se $\vec{\tau}$ é o torque resultante sobre o corpo, no referencial do espaço temos

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{espaço}} = \vec{\tau}$$

Vimos no capítulo anterior a relação entre ~~as~~ derivadas temporais nos 2 referenciais:

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{espaço}} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{corpo}} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$
$$= \vec{\tau} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Portanto,

$$\vec{\tau} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\tau} \quad : \text{ eq. Euler.}$$

Em componentes,

$$\lambda_1 \dot{\omega}_1 - (\lambda_2 - \lambda_3) \omega_2 \omega_3 = \tau_1$$

$$\lambda_2 \dot{\omega}_2 - (\lambda_3 - \lambda_1) \omega_3 \omega_1 = \tau_2$$

$$\lambda_3 \dot{\omega}_3 - (\lambda_1 - \lambda_2) \omega_1 \omega_2 = \tau_3$$

As 3 eq. de Euler determinam o movimento do corpo em rotações como visto no referencial fixo no corpo. Elas são, em geral, difíceis de usar porque as componentes do torque aplicado, como vistas no referencial do corpo em rotações, são funções complicadas (e desconhecidas!)

• do tempo. Por isto, seu uso principal é no caso em que este torque é nulo. Há, no entanto, alguns outros casos onde o torque é simples e suficiente para permitir o uso eficaz das eq. de Euler para obter informações úteis.

Considere, por exemplo, o problema anterior do pião girando. O torque gravitacional é sempre ortogonal ao eixo $\hat{e}_3 \Rightarrow \tau_3 = 0$. Além disso, e por causa da simetria axial do pião, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Portanto, a 3ª eq. Euler se reduz a $\lambda_3 \dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow$ a componente de $\vec{\omega}$ ao longo do eixo de simetria é constante.

10.8 Equações de Euler com torque nulo.
Neste caso,

$$\lambda_1 \dot{\omega}_1 - (\lambda_2 - \lambda_3) \omega_2 \omega_3 = 0$$

$$\lambda_2 \dot{\omega}_2 - (\lambda_3 - \lambda_1) \omega_3 \omega_1 = 0$$

$$\lambda_3 \dot{\omega}_3 - (\lambda_1 - \lambda_2) \omega_1 \omega_2 = 0$$

Vamos discutí-las, primeiro para o caso em que os 3 momentos de inércia principais são diferentes, depois para o caso $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, como no pião girando.

- Corpo com 3 momentos de inércia principais distintos

Vamos supor que em $t=0$ o eixo de rotação seja um eixo principal - \hat{e}_3 , por exemplo. Então, em $t=0$, $\omega_1 = \omega_2 = 0$ e as 3 derivadas $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$. Isto é, $\omega_1 = \omega_2 = 0$ para todo t , e ω_3 é constante. Portanto, se o corpo gira inicialmente em torno de um eixo principal, ele continua a fazê-lo, e com velocidade angular $\vec{\omega}$ constante. Esta afirmação se aplica, de início, à velocidade angular medida no referencial do corpo em rotação. No entanto, se $\vec{\omega} \parallel \hat{e}_3$, $\vec{L} = \lambda_3 \vec{\omega}$, e sabemos que \vec{L} é constante.

em qualquer referencial inercial. Portanto, o resultado anterior é verdadeiro em qualquer referencial inercial.

Sua recíproca não é verdadeira. Se, em $t=0$, a velocidade angular não está ao longo de um eixo principal, então $\vec{\omega}$ não é constante: ~~o~~ $\vec{\omega}$ tem pelo menos 2 componentes não nulas, e, pelas equações de Euler, pelo menos 1 componente de $\dot{\vec{\omega}}$ é não nula $\Rightarrow \vec{\omega}$ não é constante.

Conclui-se que a única forma de um corpo com 3 momentos de inércia principais diferentes poder girar livremente com velocidade angular constante é se o fizer em torno de um dos eixos principais. Será que este tipo de rotação é estável? Isto é, se a perturbarmos ligeiramente o corpo continuará a girar próximo ao eixo original, ou terá seu movimento muito alterado?

Vamos supor que gire em torno de \hat{e}_3 , com $\omega_1 = \omega_2 = 0$. Uma pequena perturbação faz com que $\omega_1, \omega_2 \neq 0$, mas pequenos. A pergunta é se continuarão pequenos ou se começam a aumentar.

Da 3ª equação de Euler,

$$\lambda_3 \dot{\omega}_3 = (\lambda_1 - \lambda_2) \omega_1 \omega_2$$

vemos que $\dot{\omega}_3$ é pequeno ($\sim \omega_1 \cdot \omega_2$) \Rightarrow é boa aproximação - no início, pelo menos - tomar ω_3 como constante.

Neste caso, as 2 primeiras equações

$$\lambda_1 \dot{\omega}_1 = [(\lambda_2 - \lambda_3) \omega_3] \omega_2$$

$$\lambda_2 \dot{\omega}_2 = [(\lambda_3 - \lambda_1) \omega_3] \omega_1$$

podem ser resolvidas facilmente:

$$\lambda_1 \ddot{\omega}_1 = [(\lambda_2 - \lambda_3) \omega_3] \dot{\omega}_2, \text{ e}$$

$$\ddot{\omega}_1 = - \left[\frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} \omega_3^2 \right] \omega_1$$

Se o coeficiente entre chaves for positivo, a solução para ω_1 é oscilatória (senoidal), o mesmo acontecendo com ω_2 . Isto acontece se λ_3 for o maior ou o menor momento principal. Portanto, o movimento será estável se o corpo estiver girando em torno do eixo de maior ou de menor momento. Por outro lado, se λ_3 está entre λ_1 e λ_2 o coeficiente é negativo, e a solução para ω_1 é uma exponencial real que cresce (e se afasta de zero) rapidamente. Como $\omega_2 \propto \dot{\omega}_1$, o mesmo ocorre com ω_2 , e o movimento é instável.

Faça o teste com um livro mantido fechado por um elástico.

Corpo com 2 momentos iguais: precisão livre

A solução completa das equações de Euler para um corpo com 3 momentos distintos é possível, mas complicada

e obscura. Se 2 dos 3 momentos principais são iguais - como no caso do pião - o problema se torna mais simples e interessante. Vamos supor, portanto, que $\lambda_1 = \lambda_2$. O que torna este caso + simples é que a 3ª eq. de Euler é

$$\dot{\omega}_3 = 0,$$

e ω_3 , medida no referencial do corpo, é constante. Isto nos permite reescrever as 2 primeiras:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)\omega_3}{\lambda_1} \omega_2 = \Omega_c \omega_2$$

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)\omega_3}{\lambda_1} \omega_1 = -\Omega_c \omega_1,$$

$$\text{com } \Omega_c = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1} \omega_3$$

As equações acopladas resultantes podem ser resolvidas - por exemplo, usando os números complexos:

$$\omega_1 + i\omega_2 = \eta$$

$$\Rightarrow \dot{\eta} = -i\Omega_c \eta$$

e

$$\eta = \eta_0 e^{-i\Omega_c t}$$

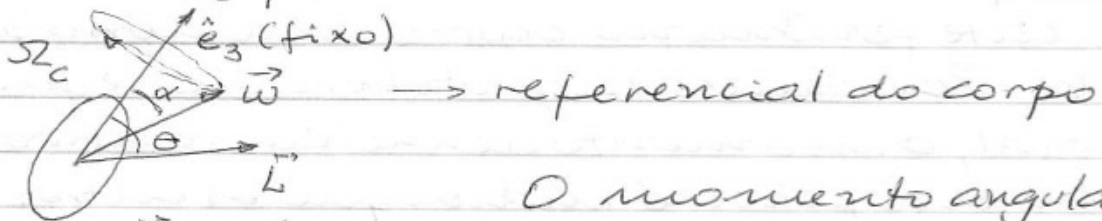
com soluções oscilatórias para ω_1 e ω_2 . Podemos escolher convenientemente a origem para que $\omega_1(t=0) = \omega_0$ e $\omega_2(t=0) = 0$

$\Rightarrow \eta_0 = \omega_0$, e tomando as partes real e imaginária de η obtemos

$$\vec{\omega} = (\omega_0 \cos \Omega_c t, -\omega_0 \sin \Omega_c t, \omega_3),$$

ω_0 e ω_3 constantes. As 2 componentes

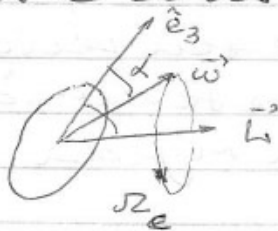
ω_1 e ω_2 giram com velocidade angular Ω_c enquanto ω_3 permanece constante. Como ω_0 e ω_3 são constantes, o ângulo α entre $\vec{\omega}$ e \hat{e}_3 também é. Visto, portanto, do referencial do corpo girante, $\vec{\omega}$ se move sobre a superfície de um cone com frequência angular Ω_c fixa.



O momento angular é $\vec{L} = (\lambda_1 \omega_1, \lambda_1 \omega_2, \lambda_3 \omega_3) =$
 $= (\lambda_1 \omega_0 \cos \Omega_c t, -\lambda_1 \omega_0 \sin \Omega_c t, \lambda_3 \omega_3)$

e os vetores $\vec{\omega}$, \vec{L} e \hat{e}_3 estão num mesmo plano, com os ângulos entre eles constantes. Neste referencial, $\vec{\omega}$ e \vec{L} executam precessão em torno de \hat{e}_3 com a taxa Ω_c .

No referencial do espaço (inercial), \vec{L} é constante. Portanto, o plano que contém $\vec{\omega}$, \vec{L} e \hat{e}_3 gira em torno de \vec{L} ; os 2 vetores $\vec{\omega}$ e \hat{e}_3 executam precessão em torno de \vec{L} . Neste referencial,



$\vec{\omega}$ traça a superfície lateral de um cone, o cone do espaço em torno do qual o cone do corpo rola. A taxa de precessão

de $\vec{\omega}$ ao redor do cone do espaço é dada por $\Omega_e = \frac{L}{\lambda_1}$.

A precessão livre de que tratamos aqui não tem nada a ver com torques externos agindo sobre corpo em rotação; ao contrário, ela ocorre para um corpo na ausência de torque externo. Um exemplo interessante deste fenômeno ocorre com nosso planeta. Por causa da protuberância equatorial, o momento de inércia relativo ao eixo polar é maior que os outros 2 por 1 parte em 300, o que implica numa precessão livre com taxa

$$\Omega_e = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1} \omega_3 = \frac{\omega_3}{300} \quad (\text{a menos que}$$

a rotação da Terra fosse perfeitamente alinhada com o eixo principal, o que não é o caso). Como $\omega_3 = 1/\text{dia}$, $\Omega_e = 1/300 \text{ dias}$. De fato, um pequeno desvio do eixo polar foi descoberto pelo astrônomo amador Seth Chandler (1846-1913), aparentemente devido ao efeito aqui discutido - apesar de seu período ser perto de 400 dias, o que se deve à Terra não ser perfeitamente rígida.